高等数学——函数极限

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期

自变量趋于有限值时函数的极限

定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义, 如果存在常数 A, 对于任意给定的正数 ϵ, 总存在正常数 δ, 使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\epsilon,$$

则**常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限**, 记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad \text{或}\ f(x_0)\to A(x\to x_0).$$

- 去心邻域：设 $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, 开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的邻域，记作 $U(x_0, \delta)$; 开区间 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的去心邻域，记作 $\mathring{U}(x_0, \delta)$; δ 称为邻域的半径.

- 去心邻域：设 $x_0 \in \mathbb{R}$，$\delta > 0$，开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的邻域，记作 $U(x_0,\delta)$；开区间 $(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的去心邻域，记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$；δ 称为邻域的半径.
- 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与函数 f 在 x_0 处是否有定义无关.

- 去心邻域：设 $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$，开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的邻域，记作 $U(x_0,\delta)$；开区间 $(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的去心邻域，记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$；δ 称为邻域的半径.
- 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与函数 f 在 x_0 处是否有定义无关.
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

- 去心邻域：设 $x_0 \in \mathbb{R}$，$\delta > 0$，开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的邻域，记作 $U(x_0, \delta)$；开区间 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的去心邻域，记作 $\mathring{U}(x_0, \delta)$；$\delta$ 称为邻域的半径.
- 极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 与函数 f 在 x_0 处是否有定义无关.
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \epsilon$.
- 几何解释：考虑点 x_0，给定 $\epsilon > 0$，存在一个区间 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$，使得函数 $f(x)$ 在该区间内的图像落在直线 $y = A - \epsilon$ 和 $y = A + \epsilon$ 之间.

例 4

证明 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$

证明.

要证明原式成立，只要证明对于任意给定$\epsilon > 0$，能找到一个正常数 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x-1| < \delta$ 时，总有

$$\left| \frac{x^2-1}{x-1} - 2 \right| < \epsilon.$$

证明.

要证明原式成立, 只要证明对于任意给定$\epsilon > 0$, 能找到一个正常数 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x-1| < \delta$ 时, 总有

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| < \epsilon.$$

要使得上述不等式成立, 即使

$$|x-1| < \epsilon \quad (x \neq 1).$$

证明.

要证明原式成立，只要证明对于任意给定$\epsilon > 0$，能找到一个正常数 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x-1| < \delta$ 时，总有

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| < \epsilon.$$

要使得上述不等式成立，即使

$$|x-1| < \epsilon \quad (x \neq 1).$$

故取 $\delta = \epsilon$，当 $0 < |x-1| < \delta$ 时，总有

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| < \epsilon.$$

□

继.

所以 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$ $\square$

定义 (左极限)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心左邻域内有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ϵ，总存在正常数 δ，使得当 x 满足不等式 $x_0-\delta<x<x_0$时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\epsilon,$$

则常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \quad 或\ f(x_0^-)=A.$$

- $x\to x_0^-$ 表示 x 从 x_0 的左侧趋于 x_0

定义 (右极限)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心右邻域内有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ϵ，总存在正常数 δ，使得当 x 满足不等式 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的右极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \ f(x_0^+) = A.$$

- $x \to x_0^+$ 表示 x 从 x_0 的右侧趋于 x_0

左右极限统称单侧极限.

定理 7 (极限存在的充分必要条件)

函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件时左右极限各自存在并且相等, 即

$$f(x_0^-)=f(x_0^+).$$

随堂练习

观测相应的函数图像，计算极限

$$(1)\lim_{x\to 1}\ln x \qquad (2)\lim_{x\to 0}(x^2+1)$$

$$(3)\lim_{x\to 0}\sin x \qquad (4)\lim_{x\to 0^-} e^x$$

随堂练习

观测相应的函数图像, 计算极限

$$(1)\lim_{x\to 1}\ln x = 0 \qquad (2)\lim_{x\to 0}(x^2+1) = 1$$

$$(3)\lim_{x\to 0}\sin x = 0 \qquad (4)\lim_{x\to 0^-} e^x = 1$$

随堂练习

观测相应的函数图像，计算 $x \to 0$ 时函数 $f(x)$ 的左、右极限，并判断 $x \to 0$ 时，函数极限是否存在.

$$(1)\ f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases} \qquad (2)\ f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(1)\ f(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} 1=1;$$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} e^x=1;$$

$$\lim_{x\to 0}=f(0^-)=f(0^+).$$

$$(1)\ f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 1 = 1; \qquad (2)\ f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x = 0;$$

$$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^x = 1; \qquad f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^x = 1;$$

$$\lim_{x\to 0} = f(0^-) = f(0^+). \qquad f(0^-) \neq f(0^+), \lim_{x\to 0}\text{不存在}.$$

自变量趋于无穷大时函数的极限

定义

设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义. 如果存在常数 A, 对于任意给定的正数 ϵ, 总存在正数 X, 使得当 x 满足不等式 $|x| > X$ 时, 对应的函数值满足不等式

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad \text{或} \ f(x) \to A(x \to \infty).$$

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\epsilon>0, \exists X>0,$ 当 $|x|>X$ 时, 有 $|f(x)-A|<\epsilon.$

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists X > 0,$ 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon.$
- 若将定义中的 “$|x| > X$” 改为 “$x > X$”, 则得到 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 的定义.

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists X > 0,$ 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon.$
- 若将定义中的“$|x| > X$” 改为 “$x > X$”, 则得到 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 的定义.
- 若将定义中的“$|x| > X$” 改为 “$x < -X$”, 则得到 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ 的定义.

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists X > 0,$ 当$|x| > X$时, 有$|f(x) - A| < \epsilon$.
- 若将定义中的 "$|x| > X$" 改为 "$x > X$", 则得到 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ 的定义.
- 若将定义中的 "$|x| > X$" 改为 "$x < -X$", 则得到 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$ 的定义.
- 几何解释: 任意给定 $\epsilon > 0$, 作直线 $y = A - \epsilon$ 和 $y = A + \epsilon$, 则总有一个正数 X 存在, 使得当 $x > X$ 或 $x < -X$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的图像位于这两条直线之间, 称 $y = A$ 为函数 $y = f(x)$ 的图形的水平渐近线.

例 7

证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

例 7

证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

证明.

给定任意 $\epsilon>0$, 要证存在 $X>0$, 使得当 $|x|>X$ 时, $\left|\frac{1}{x}-0\right|<\epsilon$.

例 7

证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

证明.

给定任意 $\epsilon>0$, 要证存在 $X>0$, 使得当 $|x|>X$ 时, $\left|\frac{1}{x}-0\right|<\epsilon$. 又因为

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|<\epsilon \Longleftrightarrow |x|>\frac{1}{\epsilon}$$

例 7

证明 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

证明.

给定任意 $\epsilon > 0$, 要证存在 $X > 0$, 使得当 $|x| > X$ 时, $\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \epsilon$. 又因为

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \epsilon \Longleftrightarrow |x| > \frac{1}{\epsilon}$$

故取 $X = \frac{1}{\epsilon}$, 当 $|x| > X = \frac{1}{\epsilon}$ 时, $\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \epsilon$. □

函数极限的性质

定理 (函数极限的唯一性)

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 那么这极限唯一.

定理 (函数极限的局部有界性)

如果 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, 那么存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$.

定理 (函数极限的局部有界性)

如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 那么存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$.

证明.

取 $\epsilon = 1$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $|f(x) - A| < 1$

定理 (函数极限的局部有界性)

如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, 那么存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \le M$.

证明.

取 $\epsilon = 1$, $\exists\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $|f(x) - A| < 1$

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \le |f(x) - A| + |A| \le 1 + |A|$$

定理 (函数极限的局部有界性)

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 那么存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \le M$.

证明.

取 $\epsilon = 1$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $|f(x) - A| < 1$

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \le |f(x) - A| + |A| \le 1 + |A|$$

故取 $M = 1 + |A|$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x)| \le M$. □

定理 (函数极限的局部保号性)

如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, 且 $A>0$(或 $A<0$), 那么存在常数 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

定理 (函数极限的局部保号性)

如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$(或 $A < 0$), 那么存在常数 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) > 0$(或 $f(x) < 0$).

证明.

此处只证明 $A > 0$ 的情形.

取 $\epsilon = \frac{A}{2}$, $\exists\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$, $|f(x) - A| < \epsilon = \frac{A}{2}$, 即

$$-\frac{A}{2} + A < f(x) < A + \frac{A}{2} \Rightarrow f(x) > \frac{A}{2} > 0.$$

□

推论

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A(A\neq 0)$, 那么就存在 x_0 的某一个去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$, 当 $x\in\mathring{U}$ 时, 就有 $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$.

推论

如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 而且 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, 那么 $A \geq 0$(或 $A \leq 0$).

- 为什么是 "$\geq$", 而不是 "> 0"? 反证法结合保号性.

定理 (函数极限与数列极限的关系)

如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，$\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足 $x_n \neq x_0 (n \in \mathbb{N}_+)$，那么函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

作业

- 例题 3, 教材 Page 29;
- 抄写函数极限定义, 教材 Page 28;
- 教材习题 1-3: 1; 3(1)(3); 4;5(1).